Die einstufig nichtregulären bzw. nichtprimen Ringe

Von O. STEINFELD in Budapest

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Die nullteilerfreien Ringe[1]) heißen auch *regulär.* Nach L. RÉDEI nennen wir jeden nichtregulären Ring, dessen echte Unterringe regulär sind, *einstufig nichtregulär.* RÉDEI hat in seiner Arbeit[2]) den folgenden interessanten Satz bewiesen.

Satz 1. *Die sämtlichen einstufig nichtregulären Ringe sind die Zeroringe von Primzahlordnung*[3]) *und die direkten Summen von zwei endlichen Primkörpern.*

Einen Ring nennt man *prim,* in dem die Null ein Primideal[4]) ist. Jeder nichtprime Ring, dessen echte Unterringe prim sind, heißt *einstufig nichtprim.*

Wir wollen in dieser Arbeit einerseits einen neuen Beweis für den Satz von RÉDEI geben, anderseits beweisen wir den folgenden

Satz 2. *Die sämtlichen einstufig nichtprimen Ringe sind die Zeroringe von Primzahlordnung und die direkten Summen von zwei endlichen Primkörpern.*

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt unmittelbar

Korollar. *Ein Ring ist dann und nur dann einstufig nichtregulär, wenn er einstufig nichtprim ist.*

Wir bemerken, daß ein regulärer Ring immer prim ist. Die vollen Matrizenringe über einem Schiefkörper sind prim, aber nichtregulär. Die Tatsache, daß die Klasse der einstufig nichtregulären Ringe und die der einstufig nichtprimen Ringe übereinstimmen, ist also ein wenig überraschend.

Wir schicken den folgenden Hilfssatz voraus.

---

[1]) Unter einem Ring verstehen wir immer einen assoziativen Ring.

[2]) L. RÉDEI, Die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math.,* **20** (1959), 238—244.

[3]) Ein Ring, dessen Quadrat 0 ist, heißt ein *Zeroring.* Unter der *Ordnung* eines endlichen Ringes verstehen wir die Anzahl seiner Elemente.

[4]) Ein Ideal $\mathfrak{p}$ eines Ringes R wird *prim* (oder ein *Primideal*) genannt, wenn für irgendwelche Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von R aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ entweder $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt.

H i l f s s a t z. *Ein Ring R ohne echte Unterringe ist entweder ein Zeroring von Primzahlordnung oder ein endlicher Primkörper.*

B e w e i s. Besitzt der Ring R ein Element $\alpha(\neq 0)$ mit $R\alpha=0$, so ist das annullierende Rechtsideal[5]) von R selbst der Ring R. R ist also in diesem Falle ein Zeroring von Primzahlordnung.

Hat der Ring R kein von Null verschiedenes Element α mit $R\alpha=0$, so sind für jedes Element $\alpha(\neq 0)$ von R

(1) $$R\alpha=R \quad \text{und} \quad \alpha R=R$$

gültig. R ist also ein Schiefkörper, der wegen der Voraussetzung ein endlicher Primkörper sein muß.[6])

B e w e i s v o n S a t z 1. Ist R ein Zeroring von Primzahlordnung, so ist R nichtregulär, ferner hat R keine echten Unterringe, deshalb ist R tatsächlich einstufig nichtregulär.

Es sei R die direkte Summe der endlichen Primkörper K und L. Das Produkt von zwei von Null verschiedenen Elementen des Ringes R ist dann und nur dann Null, wenn das eine Element in K, das andere in L liegt, also die zwei miteinander R erzeugen. Hiernach ist R wieder einstufig nichtregulär.[7])

Umgekehrt sei R ein einstufig nichtregulärer Ring. Nach der Voraussetzung hat R zwei Elemente $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ mit

(2) $$\alpha\beta=0 \qquad (\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0).$$

Das annullierende Linksideal $\mathfrak{l}$ des Elementes β ist wegen (2) von Null verschieden.

Gilt $\mathfrak{l}=R$, so ist das annullierende Rechtsideal $\mathfrak{r}$ von R wegen $R\beta=0$ $(\beta\neq 0)$ von Null verschiedenen. $\mathfrak{r}$ kann wegen $R\mathfrak{r}=0$ kein echter Unterring von R sein. R ist also in diesem Falle ein Zeroring von Primzahlordnung.

Wenn $\mathfrak{l}\subset R$ gültig ist, so gilt wegen $\mathfrak{l}\beta=0$ auch

(3) $$\beta\mathfrak{l}\cdot\beta\mathfrak{l}=\beta\cdot\mathfrak{l}\beta\cdot\mathfrak{l}=0.$$

$\beta\mathfrak{l}$ ist also wegen $\beta\mathfrak{l}\subseteqq\mathfrak{l}\subset R$ ein echter, nichtregulärer Unterring von R, deshalb muß

(4) $$\beta\mathfrak{l}=0 \qquad (\beta\neq 0)$$

bestehen. Die Elemente, die das Linksideal $\mathfrak{l}$ von links annullieren, bilden ein

5) Unter dem *annullierenden Rechtsideal* einer Untermenge H des Ringes R verstehen wir die Menge aller Elemente von R, die die Untermenge H von rechts annullieren. Ähnlich definiert man das *annullierende Linksideal* von H.

6) Vgl. mit dem Beweis von Lemma 1 der Arbeit von F. A. Szász, Note on rings in wich every proper left-ideal is cyclic, *Fundamenta Math.*, 44 (1957), 330—332.

7) Dieser Teil des Beweises stimmt mit dem Beweis von L. Rédei vollständig überein.

zweiseitiges Ideal $\mathfrak{m} \neq 0$. Wegen $\mathfrak{l}^2 \neq 0$ ist $R\mathfrak{l} \neq 0$, woraus $\mathfrak{m} \subset R$ folgt. R besitzt also ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{m}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{m}\mathfrak{l} = 0 \qquad (0 \subset \mathfrak{m} \subset R;\ 0 \subset \mathfrak{l} \subset R). \tag{5}$$

Bezeichne $\mathfrak{n}$ das annullierende Rechtsideal des Ideals $\mathfrak{m}$. Wegen (5) und wegen $\mathfrak{m}R \supseteqq \mathfrak{m}^2 \neq 0$ ist $\mathfrak{n}$ ein von Null verschiedenes, echtes (zweiseitiges) Ideal von R mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = 0 \qquad (0 \subset \mathfrak{m} \subset R;\ 0 \subset \mathfrak{n} \subset R). \tag{6}$$

Wegen (6) besteht auch $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = 0$.

Da die direkte Summe $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ der Ideale $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ nach (6) Nullteiler hat, muß

$$\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} = R \tag{7}$$

bestehen. Die Ideale $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ können keine echten Unterringe enthalten, denn im entgegengesetzten Falle hätte R von Null verschiedene, echte, nichtreguläre Unterringe, was unmöglich ist. $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ sind also infolge des Hilfssatzes endliche Primkörper, womit Satz 1 bewiesen ist.

Beweis von Satz 2. Da ein Zeroring R von Primzahlordnung nichtprim und ohne echte Unterringe ist, ist R tatsächlich einstufig nichtprim.

Ist R die direkte Summe von zwei endlichen Primkörpern, so ist R nichtprim und besitz kein von Null verschiedenes, nilpotentes Element. Da die Ordnung von R das Produkt von zwei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen ist, ist ein beliebiger echter Unterring $R'(\neq 0)$ von R von Primzahlordnung. R' hat also keinen echten Unterring $(\neq 0)$, deshalb muß R' infolge des Hilfssatzes ein Primkörper, also ein primer Ring sein.

Umgekehrt sei R ein einstufig nichtprimer Ring. Nach der Definition enthält R zwei Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$ und $\mathfrak{b} \neq 0$ mit

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0. \tag{8}$$

Ist unter den Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ das eine gleich dem Ring R, so muß auch das andere mit R übereinstimmen. Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich R einen echten, nichtprimen Unterring. R ist also jetzt ein Zeroring von Primzahlordnung.

Wenn beide Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von R verschieden sind, so ist wegen (8)

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0 \qquad (0 \subset \mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \subset R) \tag{9}$$

gültig. In diesem Falle ist R die direkte Summe der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, d. h.

$$R = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}.$$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ können keine echten Unterringe $(\neq 0)$ enthalten, also sind sie infolge des Hilfssatzes endliche Primkörper. Damit ist der Beweis beendet.

(Eingegangen am 24. September 1960)